Développement en série de Maclaurin de quelques fonctions

Thm: Si f est $(n+1)$-fois continûment dérivable sur I et $a \in I$, alors on a

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

avec $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

et $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \left(\max_{t \in [a;x]} f^{(n+1)}(t)\right) \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

Si f est indéfiniment dérivable et $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in I$

alors on a : $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Sinus:
- $\sin$ est indéf. dérivable sur $\mathbb{R}$
- $P_n(x) = \sin(a) + \frac{\cos(a)}{1!}(x-a) - \frac{\sin(a)}{2!}(x-a)^2 - \cos(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + \sin^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$

et $|R_n(x)| \leq \underbrace{\left(\max_{t \in [a;x]} f^{(n+1)}(t)\right)}_{\leq 1} \underbrace{\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\to 0} \to 0 \quad (n \to \infty)$

donc, pour $a = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x) &= \cancel{\sin(0)} + \frac{\cos(0)}{1}x - \frac{\cancel{\sin(0)}}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}}$$

Cosinus: idem ... $\left[\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}\right]$

Exp:
- $\exp(x) = e^x$ est indéf. dérivable sur $\mathbb{R}$
- $P_n(x) = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{e^n}{n!}(x-a)^n$

et $|R_n(x)| \leq \underbrace{\left(\max_{t \in [a;x]} f^{(n+1)}(t)\right)}_{\leq e^x} \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)$

donc, pour $a = 0$:

$$\left[e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right], \forall x \in \mathbb{R}$$

cf table numérique

Par ailleurs, on sait déjà que :

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1;1[$ (série géométrique)

càd : $\left[\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\right] \forall x$ tq $|x|<1$

↳ en substituant $x \to -x$: $\left[\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3+x^4-\dots \quad \forall x \text{ tq } |x|<1\right]$

↳ en intégrant : $\int \frac{1}{1+x}dx = \int 1-x+x^2-x^3+x^4-\dots$

$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\dots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$

et donc $\left[\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad \forall x \text{ tq } |x|<1\right]$

rem : on peut montrer que c'est ok $\forall x$ tq $-1<x\leq 1$